8. Mathe Nacht

Grundlagen

Vollständige Induktion

Beweise mittels vollständiger Induktion!

1. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k \cdot k! = (n+1)! - 1$

2. Für $k = 1, 2...$ seien x_k reelle Zahlen, die entweder alle im Intervall $(-1, 0)$ liegen oder alle positiv sind. Dann gilt die verallgemeinerte Bernoulli-Ungleichung:

$$\prod_{k=1}^{n}(1 + x_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} x_k$$

3. Die Zahlenfolge (a_n) sei gegeben durch

$$a_{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot a_n \text{ für } n \in \mathbb{N}, a_1 = 2$$

Zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ die Abschätzung: $a_n > n$.

Gleichungen und Ungleichungen

(Un)gleichungen mit komplexen Zahlen

Bestimme grafisch alle komplexen Zahlen z welche die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen.

4. $|z - i| = 1 = |z + 1|$

5. $|z - i + 1| < 2$

6. $|z + i| < |\overline{z} + i|$

(Un)gleichungen mit reellen Zahlen

Bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, welche die folgenden Gleichungen bzw. Ungleichungen erfüllen.

7. $x^2 - 8 \leq 2x$

8. $x|x - 2| = 1$

9. $\dfrac{x+4}{x-2} < x$

Mengen

Untersuche, ob folgende Mengen $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$ nach oben oder unten beschränkt sind. Bestimme ggf. das Supremum bzw. Infimum. Gib außerdem an, ob es sich um ein Maximum bzw. Minimum der Menge handelt.

10. $A := \{x \in \mathbb{R} \mid -3x + 2 \leq 6x, x \geq 0\}$

11. $B := \{x \in \mathbb{R} \mid 6x^2 - 4x + 8 > 10, x < 0\}$

12. $C := \{x = \dfrac{m \cdot n}{m^2 + n^2} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$

Folgen

1. Untersuche die folgenden Zahlenfolgen auf Konvergenz!
Gib ggf. den Grenzwert an!

a) $a_n = \dfrac{n^2 - 3n + (-1)^n}{3n^2 - 7n + 5}$

b) $a_n = \dfrac{nx}{1 + n|x|},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

c) $a_n = \dfrac{(n(1 + \frac{1}{n}))^4}{n^3(n+2)}$

d) $a_n = \dfrac{\dfrac{4n^2 + 3}{n^2(7-n)}}{\dfrac{4(n+1)^2 + 3}{(n+1)^2(7-(n+1))}},\ n \geq 8$

e) $a_n = \dfrac{3n}{n+1} - \dfrac{(n - arctan(n))^3}{(2n^2+1)(n+1)}$

f) Es seien $a, b \in \mathbb{R}, a, b \geq 0$ und $n \geq max\{a, b\}$.

$$a_n = n\left(1 - \sqrt{(1 - \frac{a}{n})(1 - \frac{b}{n})}\right)$$

g) $a_n = \sqrt[n]{n!}$

Rekursive Folgen

2. Untersuche auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz. Gib ggf. den Grenzwert an!

a) $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n^2}$

b) $a_{n+1} = sin(a_n),\ a_1 \in [0, \pi]$

3. Zeige die Konvergenz der reellen Folge (a_n), falls eine der folgenden beiden Eigenschaften erfüllt ist:

(i) $|a_{n+k} - a_n| \leq \frac{1}{n},\ \forall k, n \in \mathbb{N}$

(ii) $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n,\ \forall n \in \mathbb{N},\ q \in (0, 1)$

4. Zeige mittels vollständiger Induktion, dass die durch die rekursive Vorschrift

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 6} - 1,\ a_1 = 1$$

gegebene Folge

a) monoton fallend ist.

b) konvergent ist. Gib den Grenzwert mit an!

5. Seien $a_0 = 0, a_1 = 1$. Zeige für die folgende Zahlenfolge die Konvergenz und berechne den Grenzwert:

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + a_{n-1})$$

Häufungspunkte

6. Bestimme alle Häufungspunkte der Folgen und ggf. den Limes superior und den Limes inferior!

a) $a_n = \frac{1}{2^n} + (-1)^n$

b) $b_n = (1 + \frac{(-1)^n}{n})^n$

c) $c_n = \frac{(-1)^n n^2}{(2n+3)^2}$

d) $d_n = (-1)^{n+1} \frac{6n^2+13n}{5n^3+7}$

Reihen

1. Untersuche folgende Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!}$

b) $\sum_{k=5}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt[k]{k}}$

c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^4+n}$

d) $\sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{sin(k)}{k^2}$

e) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^4}{4^n}$

2. Berechne für folgende Reihen den Reihenwert.

a) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{(k+1)!}$

b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n-1}{4^n}$

c) $(*) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+4n+1}{(n(n+1))^2}$

d) $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-k)^n}{n!}$

3. Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren die folgenden Reihen?

a) $\sum_{k=0}^{\infty} (3x)^{4k}$

b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^x x^k$

8. Mathe Nacht

Stetigkeit und Differenzierbarkeit

1. Untersuche die auf dem Intervall $[0, \infty)$ definierte Funktion

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \cdot sin(\frac{1}{x}) & x > 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

in allen Punkten $x \in \mathbb{R}$, mit $x \geq 0$, auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit!

2. Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \cdot |x|$ auf Differenzierbarkeit in ihrem Definitionsbereich!

3. Gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt:
$f'(x) = f(x) \neq 0$ und $f''(x) = 2 \cdot f(x)$? Entscheide mit kurzer Begründung!

4. Betrachte die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 12 & x < -1 \\ p(x) & -1 \leq x < 2 \\ 1 - 2x & x \geq 2 \end{cases}$$

Bestimme ein Polynom p kleinsten Grades so, dass f stetig ist. Ist dieses Polynom eindeutig?

5. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \dfrac{e^x}{x^2 + x + 1}$.

(a) Berechne $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$.

(b) Ermittle alle globalen und lokalen Extrema von f!

6. Zeige, dass die Gleichung $\frac{2}{x^4} + 1 = x$ auf dem Intervall $[1, 2]$ genau eine Lösung besitzt!

7. Die Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ seien stetig und in (a, b) differenzierbar und es sei $f(a) = f(b) = 0$.
Zeige, dass für eine geeignete Stelle $c \in (a, b)$ gilt: $f'(c) = g'(c) \cdot f(c)$
Hinweis: Betrachte die Hilfsfunktion $x \mapsto f(x) \cdot e^{-g(x)}$.

8. Mathe Nacht

Beweise

1. Gegeben sei die komplexe Zahlenfolge (a_n).

Weiter sei $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = a$ und $\lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$.

Zeige, dass dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

2. Es sei (a_k) eine Folge reeller Zahlen. Beweise oder widerlege!

(a) Gilt $\lim_{k\to\infty} 2a_k = 0$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(b) Gilt $\lim_{k\to\infty} k^\beta a_k = 0$ für ein $\beta \in (0,1)$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(c) Gilt $\lim_{k\to\infty} k^\beta a_k = 0$ für ein $\beta > 1$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

3. Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Weiter sei $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $f(x_0) < 1$. Zeige:

Es gibt ein $\delta > 0$ so, dass für alle $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ gilt: $f(x) < 1$

4. Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es sei $f(0) = f(1)$. Zeige, dass es dann ein $c \in [0, \frac{1}{2}]$ gibt mit

$$f(c) = f(c + \frac{1}{2})$$

5. (Bachelor) Sei $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ stetig derart, dass $\lim_{x\to\infty} f(x) =: c \in \mathbb{R}$ existiert. Zeige, dass f gleichmäßig stetig ist.